



**Solutions processus intégrales des équations d'évolution  
abstraites et application à l'approximation numérique  
d'un problème parabolique dégénéré. [ Integral-process  
solutions of abstract evolution equations and application  
to numerical approximation of a degenerate parabolic  
boundary-value problem. ]**

Boris Andreianov, Mohamed Karimou Gazibo

► **To cite this version:**

Boris Andreianov, Mohamed Karimou Gazibo. Solutions processus intégrales des équations d'évolution abstraites et application à l'approximation numérique d'un problème parabolique dégénéré. [ Integral-process solutions of abstract evolution equations and application to numerical approximation of a degenerate parabolic boundary-value problem. ]. 2013. hal-00857478

**HAL Id: hal-00857478**

**<https://hal.science/hal-00857478>**

Preprint submitted on 3 Sep 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial| 4.0 International License

# Solutions processus intégrales des équations d'évolution abstraites et application à l'approximation numérique d'un problème parabolique dégénéré

Boris Andreianov and Mohamed Karimou Gazibo

*Laboratoire de Mathématiques CNRS UMR 6623  
Université de Franche-Comté, 16 route de Gray, 25030 Besançon, France  
bandreia@univ-fcomte.fr, mgazibok@univ-fcomte.fr*

---

## Résumé

Nous introduisons la notion de *solution processus intégrale* pour un problème d'évolution  $u' + Au \ni h$ ,  $u(0) = u_0$  gouverné par un opérateur  $m$ -accréatif  $A$  dans un espace de Banach  $X$ . Nous prouvons qu'une telle solution coïncide avec l'unique solution intégrale du problème. Ce résultat technique appliqué avec  $X = L^1$  dans une approche de compacité faible du type mesures de Young permet de montrer la convergence d'un schéma volumes finis que nous avons construit pour l'équation parabolique-hyperbolique  $u_t + (f(u) - \phi(u)_x)_x = 0$  munie de la condition de flux zéro sur le bord.

## Integral-process solutions of abstract evolution equations and application to numerical approximation of a degenerate parabolic boundary-value problem.

**Abstract** We introduce a notion of *integral-process solution* for evolution problem  $u' + Au \ni h$ ,  $u(0) = u_0$  governed by an  $m$ -accretive operator  $A$  in a Banach space  $X$ . We prove that such solution coincides with the unique integral solution of the problem. Applying this technical result with  $X = L^1$  within a weak compactness approach of Young measures' type, we prove convergence of a suitably defined finite volume scheme to the unique entropy solution of the parabolic-hyperbolic equation  $u_t + (f(u) - \phi(u)_x)_x = 0$  with the zero-flux boundary condition.

---

## Abridged English version

Given a Banach space  $X$  and an  $m$ -accretive operator  $A \subset X \times X$ , a function  $u \in C([0, T]; X)$  is called integral solution (see Bénéilan [6] and [7,8,5]) of the abstract evolution problem

$$u' + Au \ni h, \quad u(0) = u_0 \quad (1)$$

if,  $\|\cdot\|$  being the norm and  $[u, v] := \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\|u + \lambda v\| - \|u\|}{\lambda}$  the bracket on  $X$ , one has  $u(0) = u_0$  and

$$\forall (\hat{u}, \hat{z}) \in A \quad \|u(t) - \hat{u}\| - \|u(s) - \hat{u}\| \leq \int_s^t [u(\tau) - \hat{u}, h(\tau) - \hat{z}] \quad \forall s, t \in [0, T], \quad s \leq t. \quad (2)$$

We refer to [7] for the proof of uniqueness of an integral solution and to [5] for some generalizations. Here, we present a variant of the above notion that we call *integral process solution*. This notion is motivated by an application in the setting where  $X$  is a Lebesgue space on  $\Omega \subset \mathbb{R}^\ell$  and  $u$  is a *weak* limit

of approximate solutions. The inspiration comes from the idea of *entropy-process solution* closely related to Young measures' techniques (see [11,19,12,15]), in the context of the following application.

We study convergence of a finite volume scheme for the initial-boundary value problem for a degenerate parabolic equation in a regular bounded domain  $\Omega \in \mathbb{R}^\ell$  arising, e.g., in sedimentation and traffic models:

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div} f(u) - \Delta \phi(u) = 0 & \text{in } Q = (0, T) \times \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{in } \Omega, \\ (f(u) - \nabla \phi(u)) \cdot \eta = 0 & \text{on } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{P})$$

Here  $\phi$  is a non-decreasing continuous function, moreover, there exists  $u_c \in [0, u_*]$  such that  $\phi|_{[0, u_c]} \equiv 0$  but  $\phi'|_{[u_c, u_*]} > 0$ . Thus in the range  $[0, u_c]$  of values of  $u$ , (P) degenerates into a hyperbolic problem, and admissibility criteria of Kruzhkov type are needed to single out the unique and physically motivated weak solution. The initial condition  $u_0$  is measurable, the flux function  $f$  is continuous, genuinely nonlinear on  $[0, u_c]$  (cf. [18,16]); moreover,  $[0, u_*]$  is an invariant domain for the evolution of (P) due to assumption

$$f(0) = f(u_*) = 0, \quad u_0(x) \in L^\infty(\Omega; [0, u_*]) := \{u \text{ measurable on } \Omega, u(x) \in [0, u_*] \text{ for a.e. } x\}. \quad (\text{H1})$$

In the work [4], we proposed a new entropy formulation of (P) saying that  $u \in L^\infty((0, T) \times \Omega; [0, u_*])$  is an entropy solution of (P) if  $u \in C([0, T]; L^1(\Omega))$  with  $u(0) = u_0$ ,  $\phi(u) \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  and (cf. [9])

$$\forall k \in [0, u_*] \quad |u - k|_t + (\operatorname{sgn}(u - k)[f(u) - f(k) - \nabla \phi(u)])_x \leq |f(k) \cdot \eta| d\mathcal{H}^\ell \text{ in } \mathcal{D}'((0, T) \times \overline{\Omega}), \quad (3)$$

where  $\eta$  is the exterior unit normal vector to the boundary  $\Sigma = (0, T) \times \partial\Omega$  and the last term is taken with respect to the Hausdorff measure  $\mathcal{H}^\ell$  on  $\Sigma$ . Contrary to the Dirichlet case (cf. [19,15]) where the boundary condition is relaxed, (3) implies that zero-flux condition in (P) holds in the weak sense (cf. [9]).

Existence of an entropy solution to (P) follows by standard vanishing viscosity method, using in particular the strong compactness result of [17]. But in order to prove uniqueness, in [4] we faced a serious difficulty related to the lack of regularity of the flux

$$\mathcal{F}[u] := f(u) - \nabla \phi(u) \quad (4)$$

and specifically, to the weak sense in which  $\mathcal{F}[u] \cdot \eta$  annihilates on  $\Sigma$ . Namely, the standard doubling of variables method based upon formulation (3) readily leads to the uniqueness and  $L^1$  contraction property

$$\forall t \in [0, T] \quad \|u(t, \cdot) - \hat{u}(t, \cdot)\|_{L^1} \leq \|u_0 - \hat{u}_0\|_{L^1} \quad (5)$$

if we compare two solutions  $u, \hat{u}$  such that the strong (in the sense of  $L^1$  convergence, cf. [18,16]) trace of the normal flux  $\mathcal{F}[u] \cdot \eta$  at the boundary exists. In the sequel, we call such solutions *trace-regular*. Every entropy solution is trace-regular in the case of the pure hyperbolic problem (case  $u_c = u_*$ , see [16,18,9]).

The idea of symmetry breaking in the doubling of variables (see [2]) permits an extension of (5) to a kind of weak-strong comparison principle where  $u$  is a general solution and  $\hat{u}$  is a trace-regular solution. When a sufficiently large family of trace-regular solutions is available, uniqueness of general solution and principle (5) may follow by density arguments. In the present note, we exploit this weak-strong comparison arguments using the idea of integral solution and somewhat stronger regularity properties of *stationary solutions*. E.g., for the pure parabolic one ( $u_c = 0$ , see [2]) every entropy solution of the stationary problem

$$\hat{u} + \operatorname{div} f(\hat{u}) - \Delta \phi(\hat{u}) = g \text{ in } \Omega, \quad (f(\hat{u}) - \nabla \phi(\hat{u})) \cdot \eta = 0 \text{ on } \partial\Omega \quad (\text{S})$$

with  $g \in L^\infty(\Omega)$  is trace-regular if  $f \circ \phi^{-1} \in \mathbf{C}^{0,\gamma}$ ,  $\gamma > 0$  (see [14,2]). This observation, in conjunction with the use of integral solution to (1) for suitably defined  $A$ , permitted to get uniqueness of entropy solution in [2], for parabolic case. The one-dimensional hyperbolic-parabolic case ( $\Omega = (a, b)$  and  $u_c \in [0, u_*]$ ) has been treated analogously by the authors in [4], using the elementary observation that yields trace-regularity:

$$(f(\hat{u}) - \phi(\hat{u})_x)_x = g - u \in L^\infty((a, b)) \Rightarrow \mathcal{F}[u] = (f(\hat{u}) - \phi(\hat{u})_x) \in \mathbf{C}([a, b]). \quad (6)$$

Now, our goal is to justify the finite volume discretization approach (see [11] for the general guidelines) in the spirit of [12,15] for problem (P) on a family of admissible meshes  $(\mathcal{O}_h)_h$  with implicit time stepping. According to the standard estimates, as for the Dirichlet problem ([19,12,15]) approximate solutions  $u^h := u_{\mathcal{O}_h, \delta t_h}$  converge up to a subsequence, as the discretization size  $h$  goes to zero, towards an *entropy-process solution*  $\nu$ . This notion incorporates dependence on an additional variable  $\alpha \in [0, 1]$  which may represent oscillations in the family  $(u^h)_h$ . It remains to prove the uniqueness of entropy-process solution which also implies the independence of  $\nu(t, x, \alpha)$  on  $\alpha$  so that  $u(t, x) \equiv \nu(t, x, \alpha)$  is an entropy solution of (P). Here, we found it useful to define, in the abstract framework (1), the new notion of *integral-process solution* by the family of inequalities

$$\forall (\hat{u}, \hat{z}) \in A, \quad \int_0^1 (\|\nu(t, \alpha) - \hat{u}\| - \|\nu(s, \alpha) - \hat{u}\|) d\alpha \\ \leq \int_0^1 \int_s^t [\nu(\tau, \alpha) - \hat{u}, h(\tau) - \hat{z}] d\tau d\alpha \quad \text{for a.e. } s, t \in [0, T], \quad s \leq t, \quad (7)$$

where  $\nu(t, \alpha) : [0, T] \times [0, 1] \mapsto X$  is continuous at  $t = 0$  in the sense that  $\int_0^1 \|\nu(t, \alpha) - u_0\| d\alpha \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow 0^+$  essentially. This notion is purely a technical hint, indeed, we prove in Theorem 3.2, see also [13], that  $\nu(\cdot, \alpha)$  coincides with the unique integral solution  $u(\cdot)$  of (1) whenever the closure of the operator  $A$  is  $m$ -accretive densely defined. In application to the problem (P) we can prove that every accumulation point  $\nu$  in the entropy-process sense for the family  $(u^h)_h$  as  $h \rightarrow 0$  is also an integral-process solution. Hence, convergence of finite volume approximations to the unique entropy solution  $u$  follows in the cases

$$u_c = 0 \quad \text{or} \quad u_c = u_* \quad \text{and} \quad f \circ \phi^{-1} \in \mathbf{C}^{0,\gamma}, \quad \gamma > 0 \quad \text{or} \quad u_c \in [0, u_*] \quad \text{and} \quad \ell = 1. \quad (8)$$

Since in these cases  $m$ -accretivity results are available for the closure of the operator  $A$  defined on a dense in  $X$  domain  $D(A)$  of *trace-regular* solutions of (S) defined in the entropy sense (cf. (3)) by

$$(\hat{u}, \hat{z}) \in A \text{ if } \hat{u} \text{ is trace-regular and } \hat{u} \text{ solves (S) in the sense (2.1) for the source } g = \hat{z} - \hat{u}.$$

Our main results are Th. 3.2 in §3 on reduction of integral process solutions and the scheme convergence result (14) proved under assumption (8) in Th. 4.1 in §4. The role of assumption (H1) is illustrated numerically at the end of §4. The details of the approximation scheme, discrete estimates and convergence proofs can be found in [13]. Another application will be presented in the forthcoming work [3].

## 1. Introduction

Dans cette note, on introduit une notion de solution appelée *solution processus intégrale* pour le problème d'évolution (1) gouverné par un opérateur  $m$ -accréatif  $A$  dans un espace de Banach  $X$ , en vue d'une application concrète. En effet, ce nouveau concept, de nature purement technique, trouve son origine dans les difficultés rencontrées lors de l'étude de la convergence des solutions approchées de l'équation parabolique-hyperbolique (P) avec la condition de flux zéro aux limites du domaine. Une suite de solutions approchées est obtenue en discrétisant le problème (P) par une méthode volumes finis (voir [11]) implicite en temps, d'inspiration [12,15]; l'idée de solution intégrale-processus surgit alors en lien avec la compacité non-linéaire faible-\* (voir, e.g., [11,12,15,1]), en un sens proche des mesures de Young, de cette suite.

Dans le problème (P),  $\Omega$  est un domaine borné régulier de  $\mathbb{R}^\ell$ . La fonction  $\phi$  dans (P) est continue et on suppose qu'il existe une valeur  $u_c \in [0, u_*]$  telle que si l'inconnue prend ses valeurs dans  $[0, u_c]$  la fonction  $\phi$  est nulle et au-delà de cette valeur, elle devient strictement croissante. La fonction  $f$  est continue, non affine sur tout sous-intervalle de  $[0, u_c]$ , la donnée initiale  $u_0$  est mesurable et  $f, u_0$  vérifient les relations (H1) qui confinent la solution dans l'intervalle  $[0, u_*]$  (voir [4]). Lorsque  $u_c \notin \{0, u_*\}$  le problème (P) n'est ni purement parabolique ni purement hyperbolique, mais d'un type mixte. L'admissibilité des solutions doit alors être garantie, dans l'esprit de [10], de plus, l'interprétation des conditions au bord peut s'avérer

très délicate (voir [10,19,15] pour le cas de la condition de Dirichlet). Une solution entropique de (P), définie dans [4], est une fonction à valeurs dans  $[0, u_*]$  vérifiant (3) pour tout  $k \in [0, u_*]$  et telle que  $u \in C([0, T]; L^1(\Omega))$ ,  $u(0) = u_0$ . La principale difficulté pour établir l'unicité d'une solution entropique réside dans le manque de régularité du flux  $\mathcal{F}[u]$  donné par (4). L'existence de la trace  $L^1$  forte (au sens [18,16]) de la composante normale  $\mathcal{F}[u].\eta$  semble être difficile à obtenir notamment lorsque  $u_c \in (0, u_*)$ . L'idée pour pallier à cette difficulté est d'exploiter la comparaison du type "faible-fort" (Théorème 2.2) entre une solution entropique  $u$  générale et une solution entropique  $\hat{u}$  dite à *trace régulière* (cf. [2]). Or, la régularité est plus facile à appréhender pour le problème stationnaire (S); par exemple, dans le cas  $\ell = 1$  on a l'observation élémentaire (6). Ainsi, on commence dans § 2 par l'étude de (S). A l'issue de cette étude, grâce à (11) on peut définir un opérateur associé  $A$ , incorporant la trace-régularité dans la définition du domaine  $D(A)$ , et montrer son  $m$ -accrétivité dans les cas décrits par (8). Dans § 3, de caractère abstrait, nous généralisons la notion de solution intégrale afin de l'appliquer, dans § 4, à la justification de convergence d'un schéma numérique pour (P). Nous donnons à la fin du § 4 une illustration numérique de l'importance de la condition (H1). Pour les détails de l'analyse, nous renvoyons à [13]. Une deuxième application de la notion de solution processus intégrale fera l'objet du travail [3].

## 2. Problème stationnaire, solutions à trace régulière et application au problème (P)

Considérons les solutions du problème stationnaire (S) associé à (P), définies comme dans (3) :

**Définition 2.1** Une fonction  $u \in L^\infty(\Omega; [0, u_*])$  est dite solution entropique de (S) si  $\phi(u) \in H^1(\Omega)$  et

$$\forall k \in [0, u_*] \int_{\Omega} \text{sgn}(u - k)(g - u)\xi dy + \int_{\Omega} \text{sgn}(u - k)(\mathcal{F}[u] - f(k)).\nabla \xi dy + \int_{\partial\Omega} |f(k).\eta(y)| \xi d\mathcal{H}^{\ell-1} \geq 0 \quad (9)$$

pour tout  $\xi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^+$ ; ici,  $\mathcal{F}[u]$  est donné par (4) et on prend  $g \in L^\infty(\Omega; [0, u_*])$ . De plus, une telle  $u$  est dite à *trace régulière* lorsque la trace forte au sens  $L^1$  (voir, e.g., [18,16]) du flux normal  $\mathcal{F}[u].\eta$  existe.

**Théorème 2.2** Pour tout  $g$  il existe au moins une solution entropique de (S). Si  $u$  est solution entropique de source  $g$  et  $\hat{u}$ , une solution entropique à trace régulière de source  $\hat{g}$ , alors  $\|u - \hat{u}\|_{L^1} \leq \|g - \hat{g}\|_{L^1}$ .

*Preuve du Théorème 2.2 (un aperçu):* L'existence s'obtient par la méthode de viscosité évanescence, avec un argument de compacité forte (see [17]) dû à la non-linéarité du flux  $f$  sur  $[u_c, u_*]$ . L'unicité se prouve par la méthode de dédoublement de variables due essentiellement à [10], dans la variante désymétrisée de [2]. Plus précisément, en posant  $u = u(x)$ ,  $\hat{u} = \hat{u}(y)$  et avec  $\xi(x, y)$  une fonction test sur  $\bar{\Omega} \times \Omega$ , nous trouvons

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega^2} \text{sgn}(u - \hat{u})(u - \hat{u} - g + \hat{g})\xi + \text{sgn}(u - \hat{u})(\mathcal{F}[u] - \mathcal{F}[\hat{u}]).(\nabla_x + \nabla_y)\xi \\ & \leq \int_{x \in \Omega} \int_{y \in \partial\Omega} |\mathcal{F}[u](x).\eta(y)| \xi d\mathcal{H}^{\ell-1} + \int_{x \in \partial\Omega} \int_{y \in \Omega} |\mathcal{F}[\hat{u}](y).\eta(x)| \xi d\mathcal{H}^{\ell-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Il est possible de choisir une suite "désymétrisée"  $(\xi_n^{ds}(x, y))_n$  qui vérifie  $\xi_n^{ds}|_{\Omega \times \partial\Omega} \equiv 0$ ,  $\xi_n^{ds}|_{\partial\Omega \times \Omega} \neq 0$  et  $(\nabla_x + \nabla_y)\xi_n^{ds} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , pour remplacer la suite de Kruzhkov  $\xi_n^s(x, y) = \delta_n(x - y)$  avec  $(\delta_n)_n$  une unité approchée. Avec  $\xi = \xi_n^{ds}$ , le premier terme de la partie droite de (10) est nul et le second terme tend vers zéro avec  $n \rightarrow \infty$  puisque nous avons  $\mathcal{F}[\hat{u}](y).\eta(x) \rightarrow 0$  lorsque  $y \rightarrow x$  grâce à la trace-régularité de  $\hat{u}$ .  $\square$

Il y a au moins trois cas où toutes les solutions entropiques de (S) sont à trace régulière : le cas unidimensionnel, grâce à l'observation élémentaire (6); le cas parabolique pur ( $u_c = 0$ ) avec  $f \circ \phi^{-1}$  Hölderienne, grâce à [14] (voir [2]); et le cas hyperbolique pur ( $u_c = u_*$ ), grâce à [18,16] (voir [9]). Ainsi, sous l'hypothèse (8) sur  $\phi$ ,  $f$  et  $\ell$ , nous déduisons l'existence et l'unicité de la solution entropique pour le problème (S). Plus généralement, si pour  $g$  appartenant à un sous-ensemble dense en  $\|\cdot\|_{L^1}$  de  $L^\infty(\Omega, [0, u_*])$  on a existence d'une solution à trace régulière, alors on déduit l'unicité pour tout  $g \in L^\infty(\Omega, [0, u_*])$ .

La même stratégie de preuve peut être suivie pour (P), hélas on dispose rarement (hormis le cas  $u_c = u_*$ , voir [18,16,9]) d'une famille suffisamment riche de solutions à trace régulière pour (P). L'idée est alors de profiter des solutions à trace régulière pour le problème stationnaire (S).

Définissons l'opérateur  $A$  par

$$(\hat{u}, \hat{z}) \in A \Leftrightarrow \{ \hat{u} \text{ est une solution entropique à trace régulière de (S) avec } g = \hat{u} + \hat{z} \}. \quad (11)$$

Sous l'hypothèse (8),  $A$  est  $m$ -accrétif grâce au Théorème 2.2<sup>1</sup>. On emploie alors le concept de solution intégrale (2) issu de la théorie des semi-groupes non-linéaires pour comparer une solution à trace régulière de (S) et une solution entropique générale de (P), comme dans Théorème 2.2 (voir [4] pour les détails). On aboutit ainsi à l'existence et l'unicité de solution entropique pour (P), toujours sous l'hypothèse (8). Nous souhaitons exploiter la même approche pour la preuve de convergence d'un schéma numérique pour (P); la principale différence avec la méthode de viscosité est que la compacité forte des solutions approchées devient plus difficile à justifier. L'approche traditionnelle dans ce contexte est celle de la compacité non-linéaire faible-\* (voir [11,12,19,15,1]). Dans la réalisation de cette approche, nous rencontrons un obstacle technique que nous contournons grâce au nouveau concept de solution processus intégrale.

### 3. Problèmes d'évolutions abstraites : solutions processus intégrales et leur réduction

Dans cette partie, on se place dans un cadre abstrait en considérant le problème d'évolution (1) dans un espace de Banach  $X$ . Ici,  $A$  est un opérateur éventuellement multivoque défini par son graphe dans  $X \times X$ , de domaine  $D(A) = \{u \in X \mid A(u) \neq \emptyset\}$ . Une solution intégrale est une fonction  $u \in \mathcal{C}([0, T], X)$  vérifiant la famille d'inégalités (2) où  $[u, v] := \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\|u + \lambda v\| - \|u\|}{\lambda}$  est le crochet et  $\|\cdot\|$  est la norme sur  $X$ . Dans la théorie des semi-groupes non-linéaires on établit grâce au théorème de Grandall-Liggett et les résultats fondamentaux de la thèse de Ph. Bénilan [6] qu'une solution intégrale de (1) est unique dès que  $u_0 \in \overline{D(A)}$  et l'opérateur  $A$  est  $m$ -accrétif. La notion de solution intégrale est devenue une notion centrale dans l'étude d'unicité et de la comparaison des bonnes solutions des problèmes d'évolution abstraits. Une généralisation affaiblissant notamment la condition de continuité en temps pour une solution intégrale  $u$  a été introduites dans le cadre d'étude des sur- et sous-solutions intégrales ([5]). Des applications à l'étude des solutions faibles, entropiques ou renormalisées des EDP concrètes ont été nombreuses; citons notamment [8,2] and [4] liés directement au problème étudié dans cette note.

Nous proposons ici une généralisation de la notion de solution intégrale. Son intérêt apparaît en lien avec la convergence non-linéaire faible-\* (voir, e.g., [11,12,19,15,1]) des suites des solutions approchées pour (P) où l'on considère l'opérateur  $A = \text{div}(f(u) - \nabla \phi(u))$  avec la condition de flux zéro au bord.

**Définition 3.1** Soit  $A$  un opérateur accrétif. Une fonction mesurable  $\nu : (t, \alpha) \in [0, T] \times [0, 1] \mapsto X$  est dite solution processus intégrale du problème abstrait (1) :  $u' + Au \ni 0$  on  $[0, T]$ ,  $u(0) = u_0$  si  $\nu$  satisfait la famille d'inégalités (7) et de plus, la donnée initiale est prise au sens  $\text{ess-lim}_{t \downarrow 0} \int_0^1 \|\nu(t, \alpha) - u_0\| d\alpha = 0$ .

**Théorème 3.2** Soit  $A$  un opérateur  $m$ -accrétif dans  $X$  et  $u_0 \in \overline{D(A)}$ . Alors  $\nu$  est une solution processus intégrale de (1) de si et seulement si  $\nu$  est indépendante de  $\alpha$  et coïncide avec son unique solution intégrale. Ce résultat est une conséquence immédiate du fait suivant dont la preuve ([13]) s'inspire de [7,5] :

**Proposition 3.3** Soit  $A$   $m$ -accrétif dans  $X$  et  $h, g \in L^1(0, T; X)$ . Si  $\nu$  est une solution processus intégrale de  $u' + Au \ni g$ ,  $u(0, \alpha) = v_0$  et  $u$  est la bonne solution de  $u' + Au \ni h$ ,  $u(0) = u_0$ , alors pour p.t.  $t \in (0, T)$

$$\int_0^1 \|u(t) - v(t, \alpha)\| d\alpha \leq \int_0^1 \|u_0 - v_0\| d\alpha + \int_0^t \int_0^1 [u(\tau) - v(\tau, \alpha), h(\tau) - g(\tau)] d\tau d\alpha. \quad (12)$$

Malgré le fait que la notion de solution processus intégrale est réductible à celle de solution intégrale, elle nous sera très utile. En ceci, son rôle est comparable à celui des solutions processus entropiques ([11,19,12,15]) qui coïncident avec les solutions entropiques, dans le cadre d'un problème de Dirichlet du type (P).

1. Il faut préciser que dans la théorie de semi-groupes non linéaires, si  $Y$  est une partie invariante de  $X$  pour la résolvante  $(\text{Id} + \lambda A)^{-1}$  et qu'on considère le problème (1) avec  $h \equiv 0$ , on peut considérer  $A$  qui soit  $m$ -accrétif relativement à la partie  $Y \subset X$ , au sens que  $Y = \text{Im}(\text{Id} + \lambda A)$ . Pour le problème (S) avec la condition (H1) sur  $f$  et  $u_0$ , on prendra  $Y = L^1(\Omega; [0, u_*])$ .

#### 4. Application au problème (P) : Convergence d'un schéma volumes finis

Dans cette note, nous nous intéressons à la convergence des solutions approchées pour le problème (P) obtenues par la méthode Euler implicite en temps, volumes finis en espace, sur un maillage admissible  $\mathcal{O}$  incluant notamment une condition d'orthogonalité (voir [11] and [12,15,1]). Une inconnue discrète  $u_K^{n+1}$  pour chaque volume de contrôle  $K \in \mathcal{O}$  et tout  $n \in \mathbb{N}$  est introduite et le schéma est défini par

$$m(K) \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{\delta t} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}(u_K^{n+1}, u_{K,\sigma}^{n+1}) - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tau_{K,\sigma} (\phi(u_{K,\sigma}^{n+1}) - \phi(u_K^{n+1})) = 0 \quad (13)$$

avec  $u_K^0 = \frac{1}{m(K)} \int_K u_0$  pour  $K \in \mathcal{O}$ . Ici,  $\mathcal{E}_K$  désigne l'ensemble des interfaces internes  $\sigma$  du maillage contenant une partie de  $\partial K$ . Soulignons que dans (13), la condition de flux zéro est imposée au sens littéral puisque les termes de flux sur les arêtes de  $\partial K$  incluses dans  $\partial\Omega$  sont absentes. Les autres notations sont classiques dans le cadre des schémas volumes finis (voir e.g. [11,12,15]) : pour  $\sigma \in \mathcal{E}_K$ , la transmissivité  $\tau_{K,\sigma}$  est le rapport de la mesure  $(\ell-1)$ -dimensionnelle  $m(\sigma)$  de  $\sigma$  sur la mesure  $\ell$ -dimensionnelle  $m(K)$  de la maille  $K$ ;  $u_{K,\sigma}^{n+1}$  est l'inconnue au niveau temporel  $(n+1)$  dans la maille  $L$  telle que  $\sigma = \partial L \cap \partial K$ ; et les flux convectifs  $F_{K,\sigma}$  vérifient les conditions classiques de consistance et de monotonie :

$$\forall a, b \in [0, u_*] \quad F_{K,\sigma}(a, a) = m(\sigma)f(a) \cdot \eta_{K,\sigma}, \quad \text{et} \quad \partial_b F_{K,\sigma}(a, b) \leq 0 \leq \partial_a F_{K,\sigma}(a, b),$$

où  $\eta_{K,\sigma}$  est le vecteur unitaire normal à  $\sigma$ , extérieur à  $K$ .

Si ce schéma implicite possède une solution, on dira que la fonction continue par morceaux  $u_{\mathcal{O},\delta t}(t, x)$  définie par :  $u_{\mathcal{O},\delta t}(t, x) = u_K^{n+1}$  pour  $x \in K$  et  $t \in [n\delta t, (n+1)\delta t]$ , est solution approchée de (P). On retrouve dans [13] des estimations *a priori* semblables à celles de [12,1] : les bornes  $0 \leq u_{\mathcal{O},\delta t} \leq u_*$ , une estimation  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  discrète, des inégalités entropiques discrètes puis continues du type (3) avec un terme reste, et des estimations des translatées  $L^2$  en espace-temps pour  $\phi(u_{\mathcal{O},\delta t})$ . L'existence de  $u_{\mathcal{O},\delta t}$  s'en déduit par des arguments de degré topologique. Il est alors possible de prouver qu'une sous-suite des solutions  $u_{\mathcal{O}_h,\delta t_h}$ , où  $h$  désigne la taille des discrétisations, converge en un sens non-linéaire faible-\* vers une limite  $\nu$  dite solution processus-entropique, définie, en posant  $u = \int_0^1 \nu(\alpha) d\alpha$ , par

$$\forall k \in [0, u_*] \quad \left( \int_0^1 |\nu(\alpha) - k| d\alpha \right)_t + \left( \int_0^1 \text{sgn}(\nu(\alpha) - k) [f(\nu(\alpha)) - f(k)] d\alpha \right)_x - |\phi(u) - \phi(k)|_{xx} \leq |f(k) \cdot \eta| d\mathcal{H}^\ell$$

dans  $\mathcal{D}'((0, T) \times \bar{\Omega})$ , où  $\nu : (t, x, \alpha) \in [0, T] \times \Omega \times [0, 1]$  est une fonction mesurable à valeurs dans  $[0, u_*]$  et la variable  $\alpha$  permet de tenir compte d'éventuelles oscillations dans la famille  $(u_{\mathcal{O}_h,\delta t_h})_h$ .

Contrairement au problème de Dirichlet où l'on prouve directement que la solution processus-entropique coïncide avec la solution entropique  $u$ , pour la condition de flux zéro le problème de régularité du flux  $\mathcal{F}[u]$  empêche à nouveau de conclure. S'inspirant de [4], on compare alors une solution à trace régulière du problème stationnaire (S) et la solution processus-entropique  $\nu$ . Il apparaît que la solution processus entropique  $\nu$  vérifie aussi les inégalités (7) qui nous ont conduit à introduire les solutions processus intégrales pour (1) et à établir notre premier résultat (Th. 3.2). Notre deuxième résultat en découle :

**Théorème 4.1** *Supposons que  $A$  défini par (11) est  $m$ -accrétif relativement à  $L^1(\Omega; [0, u_*])$ . Alors la solution processus-entropique est l'unique solution entropique  $u$ . Dans ce cas, nous avons*

$$u_{\mathcal{O}_h,\delta t_h} \longrightarrow u \text{ dans } L^p((0, T) \times \Omega) \text{ quand } h \longrightarrow 0, \quad \forall p \in [1, +\infty). \quad (14)$$

on prouve également la convergence des gradients discrets de  $\phi(u_{\mathcal{O},\delta t})$  vers  $\phi(u)$  dans  $L^2((0, T) \times \Omega)$ . En particulier, le schéma (13) converge dans les trois cas décrits par la condition (8).

Nous terminons par des illustrations numériques obtenues par le schéma volume finis 1D explicite en temps. Notamment, nous mettons en évidence l'importance de l'hypothèse (H1). On voit dans Figure 1 que dans le test sans hypothèse (H1) une couche de bord apparaît ; toutefois, si on raffine  $h$  on observe la convergence de  $u_{\mathcal{O}_h,\delta t_h}$  vers une fonction bornée par  $\|u_0\|_\infty$ . Ainsi, la condition de flux zéro imposée dans (13) n'est plus vérifiée à la limite, rendant la formulation (3) inappropriée en dehors du cadre (H1).

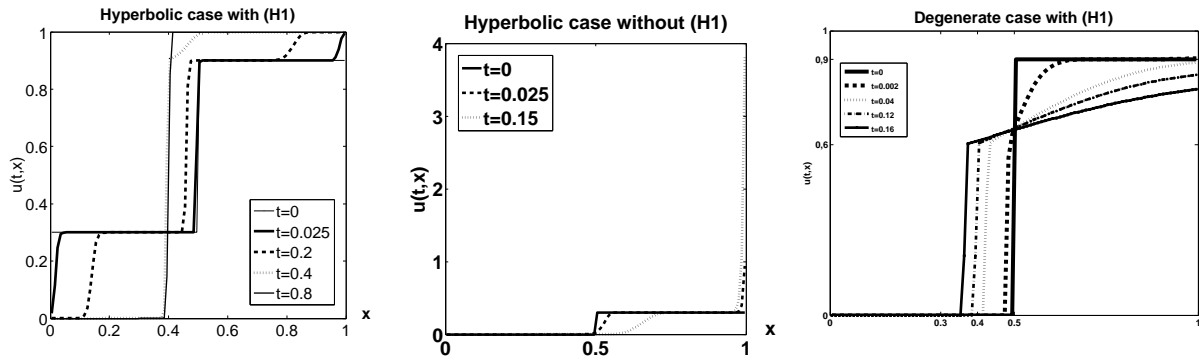


FIGURE 1. Résultats numériques : (a)  $f(u) = u(1-u)$ ,  $\phi \equiv 0$  (b)  $f(u) = \frac{u^2}{2}$ ,  $\phi \equiv 0$  (c)  $f(u) = u(1-u)$ ,  $\phi(u) = (u-0.6)^+$ .

**Acknowledgement.** Le travail sur cette note a été soutenu par l'Agence Nationale de la Recherche, dans le cadre du projet Jeunes Chercheurs CoToCoLa.

## Références

- [1] B. Andreianov, M. Bendahmane, and K.H. Karlsen. Discrete duality finite volume schemes for doubly nonlinear degenerate hyperbolic-parabolic equations. *J. Hyp. Diff. Equ.* 7(2010), no.1, pp.1–67.
- [2] B. Andreianov, F. Bouhsiss, *Uniqueness for an elliptic-parabolic problem with Neumann boundary condition*. *J. Evol. Equ.* 4 (2004) 273-295.
- [3] B. Andreianov, C. Cancès and S.S. Ghoshal. *Degenerate parabolic problems with discontinuous flux*. In preparation.
- [4] B. Andreianov, M. Karimou Gazibo, *Entropy formulation of degenerate parabolic equation with zero-flux boundary condition*, *ZAMP Zeitschr. Angew. Math. Phys.*, appeared online, 2013. DOI :10.1007/s00033-012-0297-6
- [5] L. Barthélemy and Ph. Bénilan, *Subsolutions for abstract evolution equations*, *Potential Anal.* (1992), 93-113.
- [6] Ph. Bénilan, *Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications*, Thèse d'état, Orsay, 1972.
- [7] Ph. Bénilan, Crandall, M. G. and Pazy, A., *Nonlinear evolution equations in Banach spaces*. Preprint book.
- [8] Ph. Bénilan, P. Wittbold, *On mild and weak solutions of elliptic-parabolic problems*. *Adv. Differ. Equ.* 1 (6) (1996)
- [9] R. Bürger, H. Frid, K. H. Karlsen, *On the well-posedness of entropy solution to conservation laws with a zero-flux boundary condition*. *J. Math. Anal. Appl.* 326 (2007), 108-120.
- [10] J. Carrillo, *Entropy solutions for nonlinear degenerate problems*. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 147 (4) (1999) 269-361.
- [11] R. Eymard, T. Gallouët and R. Herbin. *Finite Volume Methods. Handbook of Numerical Analysis*, Vol. VII, P. Ciarlet, J.-L. Lions, eds., North-Holland, 2000.
- [12] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin and A. Michel. *Convergence of a finite volume scheme for nonlinear degenerate parabolic equations*, *Numer. Math.* 92(1) :41–82, 2002.
- [13] M K. Gazibo, *Degenerate parabolic equation with zero flux boundary condition and its approximations*. Preprint disponible sur <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00855746>.
- [14] G M. Lieberman, *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equation*. *Nonlinear Anal, Theory, Methods and Applic.* 12 (11) (1988) pp 1203-1219.
- [15] A. Michel, J. Vovelle, *Entropy formulation for parabolic degenerate equations with general Dirichlet boundary conditions and application to the convergence of FV methods*. *SIAM J. Numer. Anal.* 41 (2003) 2262-2293.
- [16] E.Yu. Panov, *Existence of strong traces for quasi-solutions of multidimensional scalar conservation laws*. *J. Hyp. Diff. Equ.*, 4 (2009), 4 , pp 729-770.
- [17] E.Yu. Panov, *On the strong pre-compactness property for entropy solutions of a degenerate elliptic equation with discontinuous flux*. *J. Differential Equations.* 247 (2009) 2821–2870.
- [18] A. Vasseur, *Strong traces for solutions of multidimensional scalar conservation laws*. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 160 (2001) 181-193.
- [19] J. Vovelle. *Convergence of finite volume monotone schemes for scalar conservation laws on bounded domains*. *Numer. Math.* 90(3) :563–596, 2002.